Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Matlab-Einführung

Aufgabe 0: (0 Punkte)
Machen Sie sich mit dem Programmsystem `matlab` vertraut anhand der folgenden Liste.

1. Loggen Sie sich wie gewohnt an einem Rechner im Rechnerraum in der Bibliothek ein und öffnen Sie ein Befehlsfenster (xterm, kdeterm, cmdterm...). Geben Sie dort ein:
   `. /etc/profile; environ numeric; matlab-class`
2. Nach einiger Zeit öffnet sich ein dreigeteiltes Fenster. Im rechten, großen Fenster können Sie Befehle eingeben und sehen die entsprechenden Ausgaben.
3. Wählen Sie aus dem Menü **Help** und dort **Demos**.
4. Lassen Sie sich die Fähigkeiten des Programms demonstrieren, indem Sie einige Punkte unter **Matlab** im neuen Fenster auswählen (Graphics, Gallery).
5. Wählen Sie unter **Mathematics** die Demo **Basic matrix operations** und lesen Sie die entsprechenden Texte durch. Notieren Sie sich Grundoperationen, etwa wie man eine Matrix eingibt.
6. Testen Sie Ihr Verständnis, indem Sie folgende Aufgaben lösen:
   (a) Setzen Sie
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 3 & 2 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$
   (b) Berechnen Sie die Determinante von AA^t. Suchen Sie die Funktion, die die Determinante einer Matrix berechnet, indem Sie unter **Help, Matlab Help, Index** das Schlagwort **determinant** eingeben.
   (c) Berechnen Sie die Eigenwerte von AB.
   (d) Berechnen Sie die Eigenwerte von $ABB^tA^t + AA^t$.
   (e) Stellen Sie A als Bild dar mit Hilfe der Funktion **imagesc**. Blenden Sie einen Farbkeil (colorbar) ein und interpretieren Sie das Bild. Benutzen Sie wieder die Hilfe, falls nötig.

Hinweis: Falls Sie die Programmieraufgaben lieber auf Ihrem eigenen Rechner lösen wollen, können Sie einen Blick auf **Scilab** werfen. Scilab ist ein frei verfügbares Programm, das einen ähnlichen Aufbau wie Matlab hat und für die Vorlesung ausreicht. Informationen finden Sie unter `http://www-rocq.inria.fr/scilab/`. In diesem Fall sind Sie für die Installation etc. selbst verantwortlich, im Rahmen der Vorlesung werden hierzu keine Hinweise gegeben.

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 1 , Abgabe: 22.10.2004 , 11.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Lösen Sie die Gleichung

$$y^2 + 1.3y + c = 0$$

mit $c = 0.422498$ und $c = 0.422497$. Vergleichen Sie die Resultate und erklären Sie das Ergebnis durch die Verstärkungsfaktoren.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei rd eine Rundung und $x \neq 0$. Zeigen Sie:

1. $$\left| \frac{rd(x) - x}{rd(x)} \right| \leq \text{ eps } .$$

2. Es gibt ein $\rho \in \mathbb{R}$ mit $|\ell n \rho| \leq$ eps, so daß

$$rd(x) = \rho x \; .$$

Hinweis: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $1 + x \leq e^x$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Maschinengenauigkeit eps des von Ihnen verwendeten Rechners.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0.5, & x = 0 \end{cases}$$

unendlich oft differenzierbar ist.

(c) Berechnen Sie $f(x)$ für $|x| \leq 10\sqrt{\text{eps}}$ nach der angegebenen Formel und stellen Sie die Resultate graphisch dar. Was beobachten Sie? Haben Sie eine Erklärung?

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Sei $x_n = 3^{-n}$.

(a) Zeigen Sie: $x_n = \frac{10}{3} x_{n-1} - x_{n-2}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1/3$

(b) Berechnen Sie x_n nach der Formel (a) für $n = 1, \ldots, 20$ mit einem Rechner Ihrer Wahl. Was beobachten Sie? Haben Sie eine Erklärung?

Prof. Dr. F. Natterer WS 2004/05

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 2 , Abgabe: 29.10.2004 , 11.00 Uhr

Die Programmieraufgabe 8 darf eine Woche später abgegeben werden.

Aufgabe 5: (4 Punkte)
Sei A eine (n,n)-Matrix und B eine (m,m)-Matrix. Wir betrachten das lineare System

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} a_{ij}b_{kl}x_{jl} = c_{ik}\ , \quad i=1,\ldots,n\ , \quad k=1,\ldots,m\ .$$

Zeigen Sie:

(a) Das lineare System ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det(A)\ \det(B) \neq 0$ gilt.

(b) Die Lösung des Gleichungssystems ist mit

$$\frac{1}{3}(n^3+m^3)+(nm^2+mn^2)+O(n^2+m^2)$$

flops möglich.

Aufgabe 6: (4 Punkte)
Die (n,n)-Matrix A sei tridiagonal, d.h. $a_{i,j}=0$ für $|i-j|>1$.

Zeigen Sie, dass sich das Eliminationsverfahren ohne Pivotisierung zur Lösung von $Ax=b$ mit

$$5n-4$$

flops durchführen lässt.

Aufgabe 7: (4 Punkte)
Die (n,n)-Matrix A sei symmetrisch, d.h. $a_{ij}=a_{ji},\ \ i,j=1,\ldots,n$.

Zeigen Sie, dass sich das Eliminationsverfahren ohne Pivotsuche zur Lösung von $Ax=b$ in $\frac{1}{6}n^3+O(n^2)$ flops durchführen lässt.

Aufgabe 8: (Programmieraufgabe, 4 Punkte**)** Schreiben Sie ein Programm elim(A,b,x,n) für das Eliminationsverfahren ohne und mit Spaltenpivotsuche zur Lösung von $Ax=b$. Testen Sie Ihr Programm an Hand folgender Beispiele:

(a) $a_{ij}=1/(i+j-1),\ \ i,j=1,\ldots,n$. Bestimmen Sie b so, dass $x_i=1,\ \ i=1,\ldots,n$ Lösung wird.

(b) Wie (a), aber $a_{ii}=1,\ \ i=1,\ldots,n$.

Sei $\tilde{x}$ die berechnete Lösung. Berechnen Sie in jedem Falle $A\tilde{x}-b$. Wählen Sie $n=10,20$.

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 3 , Abgabe: 05.11.2004 , 11.00 Uhr

Die Programmieraufgabe 12 darf eine Woche später abgegeben werden.

Aufgabe 9: (4 Punkte)
Bestimmen Sie von Hand die Cholesky-Zerlegung von A und lösen Sie $Ax = b$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 6 & 13 & 13 \\ 10 & 13 & 27 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 19 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10: (4 Punkte)
Die (n, n)-Matrix A besitze eine LR-Zerlegung $A = LR$ mit $\ell_{ii} = 1,\ i = 1, \ldots, n$.
Zeigen Sie:

(a) L, R mit dieser Eigenschaft sind eindeutig bestimmt, falls A nicht singulär ist.

(b) Ist A nicht singulär und von Bandbreite m (d.h. $a_{ij} = 0$ für $|i-j| > m$), so gilt dies auch für L und R.

(c) Hat A obere Hessenberg-Form (d.h. $a_{ij} = 0$ für $i - j > 1$), und ist A nicht singulär, so kann man die LR-Zerlegung in $\frac{1}{2}n^2 + O(n)$ flops herstellen.

Aufgabe 11: (4 Punkte)
Sei T eine reelle, symmetrische (n, n) Tridiagonalmatrix mit positiven Außerdiagonalelementen. Sei $(u^\ell)_{\ell=1,2,\ldots}$ eine Folge von Vektoren mit

$$u^{\ell+1} = Tu^\ell\ , \quad u^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Zeigen sie, dass T durch die Zahlen $g_\ell = u_1^\ell,\ \ell = 1, \ldots, 2n-1$, bis auf das $(n, n)-$Element, eindeutig bestimmt ist und geben Sie einen Algorithmus zur Berechnung von T an.
<u>Hinweis:</u> Betrachten Sie die $(n, n)-$Matrix $U = (u^1, \ldots, u^n)$ und zeigen Sie, dass man U durch Cholesky - Zerlegung einer geeigneten, aus den g_ℓ gebildeten Matrix G erhält.

Aufgabe 12: (Programmieraufgabe, 4 Punkte**)** Schreiben Sie ein Programm choldcmp (A, d, n) zur Cholesky - Zerlegung LL^T der reellen positiv definiten $(n, n)-$Matrix A . Nur der Platz in und oberhalb der Diagonalen von A muss besetzt werden. L findet sich unterhalb der Hauptdiagonalen und in d.
Testen Sie Ihr Programm an der Hilbert-Matrix aus Aufgabe 8(a) mit $n = 4$.

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 4 , Abgabe: 12.11.2004 , 11.00 Uhr

Die Programmieraufgabe 16 darf eine Woche später abgegeben werden.

Aufgabe 13: (4 Punkte)
Zeigen Sie:

$$\|A\|_2 = \rho(A^*A)^{1/2}, \qquad \|A\|_1 = \operatorname*{Max}_j \sum_i |a_{ij}|$$

Aufgabe 14: (4 Punkte)

a) Sei A eine hermitesche, invertierbare (n,n)-Matrix und seien $\lambda_{\max}$, $\lambda_{\min}$ der betragsgrößte bzw. betragskleinste Eigenwert von A. Zeigen Sie:

$$k_2(A) = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|} .$$

b) Es sei bekannt, daß in der Gleichung

$$Ax = b\ , \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} ,$$

A und b in der $\|\cdot\|_2$-Norm jeweils einen maximalen relativen Fehler von 0.05 aufweisen. Welche relative Genauigkeit können Sie für x garantieren?

Aufgabe 15: (4 Punkte)
Sei A eine reelle (n,n)-Matrix.

(a) Zeigen Sie, dass die QR-Zerlegung von A nach Householder $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$ Rechenoperationen erfordert.

(b) Sei A eine Hessenberg-Matrix, d.h. $a_{i,j} = 0$ für $i > j+1$. Wieviele Rechenoperationen braucht die QR - Zerlegung von A nach Householder?

(Angabe $an^b + O(n^{b-1})$ genügt).

Zeigen Sie, dass auch Q Hessenbergform hat.

Aufgabe 16: (Programmieraufgabe, 4 Punkte) Schreiben Sie ein Programm qrdcmp (A,d,n,m) zur $QR-$Zerlegung nach Householder. Die $(n,m)-$Matrix A enthält bei Aufruf die zu zerlegende Matrix ($n \geq m$). Der Faktor R finde sich nach Ablauf des Programms oberhalb der Diagonalen von A und in dem $m-$Vektor d. Auf und unterhalb der Diagonalen von A befinden sich die Vektoren der Spiegelungen. Schreiben Sie weiter die Programme

qmalx (A,x,n,m) , qtmalx (A,x,n,m) ,

welche - nach Aufruf von qrdcmp (A,d,n,m) - den m bzw. $n-$Vektor x mit Qx bzw. Q^*x überschreiben.

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 5 , Abgabe: 19.11.2004 , 11.00 Uhr

Die Programmieraufgabe 20 darf eine Woche später abgegeben werden.

Aufgabe 17: (4 Punkte)
Bestimmen Sie die verallgemeinerte Inverse des dyadischen Produktes vu^*, $v,\ u \in K^n$, $\|u\|_2 = \|v\|_2 = 1$.

Aufgabe 18: (4 Punkte)
Sei A^+ die verallgemeinerte Inverse der Matrix A. Zeigen Sie:

(i) $AA^+A = A$

(ii) Ist A eine normale (n, n)-Matrix, d.h. $AA^* = A^*A$, so gilt $AA^+ = A^+A$.

Aufgabe 19: (4 Punkte)
Sei A eine hermitesche Matrix, die nur die Eigenwerte 1 und 0 hat, und sei A^+ ihre verallgemeinerte Inverse. Zeigen Sie: $A^+ = A$. Gilt dies auch ohne die Voraussetzung dass A hermitesch ist?

Aufgabe 20: (Programmieraufgabe, 4 Punkte**)** Der Gezeitenwasserstand in der Nordsee werde in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) durch

$$H(t) = h + a\sin\frac{2\pi t}{12} + b\cos\frac{2\pi t}{12}$$

mit unbekannten Konstanten h, a, b beschrieben. Folgende Messwerte liegen vor:

t	0	2	4	6	8	10	*Stunden*
$H(t)$	1.0	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8	m

Bestimmen Sie h, a, b aus dem überbestimmten Gleichungssystem $H(t_i) = h_i,\ t_i = 0, 2, \ldots, 10$.

Verwenden Sie dazu die Programme aus Aufgabe 16.

Prof. Dr. F. Natterer WS 2004/05

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 6 , Abgabe: 26.11.2004 , 11.00 Uhr

Die Programmieraufgabe 24 darf eine Woche später abgegeben werden.

Aufgabe 21: (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $f(\overline{x}) = 0$, $f'(\overline{x})$ invertierbar.

Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung D von $\overline{x}$, so dass das vereinfachte Newton-Verfahren für jedes $x^0 \in D$ gegen $\overline{x}$ konvergiert.

Aufgabe 22: (4 Punkte)
Sei A eine $(n, n)-$Matrix. Das Eigenwertproblem $Ax = \lambda x$ ist äquivalent zu dem nichtlinearen Gleichungssystem

$$Ax - \lambda x = 0 \ , \qquad \|x\|_2^2 - 1 = 0$$

von $n + 1$ Gleichungen in den $n + 1$ Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$, λ.

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix dieses Gleichungssystems und stellen Sie das Newton-Verfahren auf.

(b) Zeigen Sie: Ist λ ein algebraisch einfacher Eigenwert von A und sind die Startwerte λ^0, x^0 hinreichend nahe bei λ, x gewählt, so konvergiert das Newton-Verfahren quadratisch gegen λ, x.

Aufgabe 23: (4 Punkte)
Stellen Sie das Newton-Verfahren für $f(x) = \frac{1}{x} - a$ auf und zeigen Sie, dass es für $|1 - ax_0| < 1$ konvergiert.

Aufgabe 24: (Programmieraufgabe, 4 Punkte**)** Schreiben Sie ein Programm für das Newton-Verfahren für das System

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2) &= 0 \end{aligned}$$

und testen Sie es für das Problem

$$\begin{aligned} x_1 - \sin(x_2 + e^{x_1}) &= 0 \\ x_2 - \cos(x_1 - e^{x_2}) &= 0 \, . \end{aligned}$$

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 7 , Abgabe: 03.12.2004 , 11.00 Uhr

Die Programmieraufgabe 28 darf eine Woche später abgegeben werden.

Aufgabe 25: (4 Punkte)
Die Inversion der (n,n)-Matrix A ist gleichbedeutend mit der Lösung des nichtlinearen Systems

$$F(X) = X^{-1} - A = 0\ .$$

Stellen Sie das Newton-Verfahren zur Lösung von $F(X) = 0$ auf und zeigen Sie, dass ein Schritt des Newton - Verfahrens durch zwei Matrix - Multiplikationen und weitere n Additionen ausgeführt werden kann.

Aufgabe 26: (4 Punkte)
Sei A eine positiv definite (n,n)-Matrix. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte positiv definite Quadratwurzel $X = \sqrt{A}$ von A, d.h. X ist positiv definit und $X^2 = A$.

Zeigen Sie: Das Newton-Verfahren für das nichtlineare System $X^2 = A$ von $n(n+1)/2$ Unbekannten x_{ij}, $i \geq j$, mit $n(n+1)/2$ gegebenen a_{ij}, $i \geq j$, lautet

$$X^{k+1} = \frac{1}{2}\left(X^k + (X^k)^{-1}A\right)\ .$$

Tip: Die zu berechnende Matrix X ist offenbar invertierbar und kommutiert mit A. Gehen Sie deshalb von Startmatrizen $X^{(0)}$ aus, die neben der Symmetrie ebenfalls diese Eigenschaften haben.

Aufgabe 27: (4 Punkte)
Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.
Man zeige für das Gesamtschritt- und das Einzelschrittverfahren: Das Verfahren zur Lösung von $Ax = b$ konvergiert genau dann für alle b und alle Startwerte x_0, wenn $|a| < 2$.

Aufgabe 28: (Programmieraufgabe, 4 Punkte**)** Lösen Sie das Gleichungssystem ($n = 10$)

$$\begin{aligned} &4u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = h^2\ ; \quad i,j = 1,\ldots,n-1, \quad h = 1/n \\ &u_{ij} = 0 \quad \text{falls} \;\; i \in \{0,n\} \quad \text{oder} \;\; j \in \{0,n\} \end{aligned}$$

durch das SOR–Verfahren mit $\omega = 1$ und $\omega = 1.53$.

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 8 , Abgabe: 10.12.2004 , 11.00 Uhr

Die Programmieraufgabe 32 darf eine Woche später abgegeben werden.

Aufgabe 29: (4 Punkte)
Sei A die $(n,n)-$Matrix mit

$$a_{ii} = 2 \ , \quad i = 1, \ldots, n \ , \qquad a_{i+1,i} = a_{i,i+1} = -1 \ , \quad i = 1, \ldots, n-1 \ .$$

Alle anderen Elemente von A seien 0.

Zeigen Sie, dass A die Eigenwerte

$$\lambda_\ell = 4 \sin^2 \left(\frac{\ell \pi}{2n+2} \right) \ , \quad \ell = 1, \ldots, n$$

hat.

Hinweis: Machen Sie für einen Eigenvektor x den Ansatz $x_i = \sin(c\, i)$, $i = 1, \ldots, n$ und bestimmen Sie c. Benutzen Sie das Additionstheorem für den Sinus.

Aufgabe 30: (4 Punkte)
Sei A die $(n,n)-$Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & & & . & & & & \\ . & & & & . & & & \\ . & & & & & . & & \\ 0 & 0 & . & & . & . & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & . & . & . & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie $\det(\lambda I - A)$.

(b) Zeigen Sie, dass jeder EW von A die geometrische Vielfachheit 1 hat.

(c) Geben Sie die Jordan'sche Normalform von A an.

Aufgabe 31: (4 Punkte)

(a) Wieviele paarweise nicht ähnliche $(6,6)-$Matrizen gibt es, deren charakteristisches Polynom $(\lambda-3)^4\,(\lambda-1)^2$ ist?

(b) Sei $w \in \mathbb{C}^n$ mit $\|w\|_2 = 1$.
Man bestimme die Jordan'sche Normalform von $A = I - 2ww^*$.

Aufgabe 32: (Programmieraufgabe, 4 Punkte) Erstellen Sie ein Programm für die Potenzmethode. Berechnen Sie damit den größten Eigenwert der Matrix aus Aufgabe 29 für $n = 10$. Geben Sie einen zugehörigen Eigenvektor der Länge 1 an.

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 9 , Abgabe: 17.12.2004 , 11.00 Uhr

Die Programmieraufgabe 36 darf eine Woche später abgegeben werden.

Aufgabe 33: (4 Punkte)
Sei A_n die $(n,n)-$Tridiagonalmatrix mit

$$a_{ii} = a_i \ , \quad i = 1, \ldots, n \ , \qquad a_{i,i+1} = b_i \ , \quad a_{i+1,i} = c_i \ , \quad i = 1, \ldots, n-1 \ .$$

Zeigen Sie, dass für das charakteristische Polynom $P_n(\lambda)$ von A_n die Rekursion

$$P_n = (\lambda - a_n)P_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1}P_{n-2} \ , \qquad n = 2, 3, \ldots \ ,$$

erfüllt ist.

Hinweis: Entwickeln Sie $det(\lambda I - A_n)$ nach der letzten Zeile, und die verbleibende Determinante nach der letzten Spalte. Am besten machen Sie sich die Sache zunächst für $n = 4$ klar.

Aufgabe 34: (4 Punkte)
Sei $H = (h_{ij})$ eine Hessenbergmatrix und $H = QR$, $R = (r_{ij})$, ihre QR-Zerlegung. Zeigen Sie: $|r_{ii}| \geq |h_{i+1,i}|$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Aufgabe 35: (4 Punkte)
Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte der reellsymmetrischen Matrix A, und sei $A = QR$ die QR-Zerlegung von A, $R = (r_{ij})$. Dann gilt

$$|r_{nn}| \geq \min_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j| \ .$$

Aufgabe 36: (Programmieraufgabe, 4 Punkte**)** Man führe die Potenzmethode durch für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1.5 & -1.5 & -1 \\ -0.5 & 2.5 & 1 \\ 0.5 & 1.5 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1.5 & -0.5 \\ -1 & 2.5 & 0.5 \\ 2 & 1.5 & 4.5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entscheiden Sie aufgrund des Verhaltens der x^k, welcher der folgenden Fälle vorliegt. Benutzen Sie als Startvektoren x^0 die Vektoren $(1,1,1)$ und $(1,0,0)$.

a) $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, aber $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

b) $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$, λ_1 von algebraischer Vielfachheit 1.

c) Zum betragsgrößten Eigenwert gehört ein Jordan-Kästchen der Länge größer als Eins.

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 10 , Abgabe: 23.12.04 , 11.00 Uhr

Die Programmieraufgabe 40 darf bis zum 14.01.2005 abgegeben werden.

Aufgabe 37: (4 Punkte)
Die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 9 & -6 & 0 \\ 13.5 & -11 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 29 & -16 & -8 \\ 28.25 & -14 & -9 \\ 30.25 & -19 & -6 \end{pmatrix}$$

haben beide den betragsgrößten Eigenwert $\lambda_1 = 3$.

a) Berechnen Sie nach der Potenzmethode für beide Matrizen Approximationen x_A, λ_A bzw. x_B, λ_B für λ_1 und einen dazugehörigen Eigenvektor x_1, so dass für die Defekte

$$\begin{aligned} d_A &= Ax_A - \lambda_A x_A \quad , \quad d_B = Bx_B - \lambda_B x_B \quad \text{gilt :} \\ \varepsilon_A &= \tfrac{\|d_A\|_2}{\|x_A\|_2} \leq 0.1 \quad , \quad \varepsilon_B = \tfrac{\|d_B\|_2}{\|x_B\|_2} \leq 0.1 \quad . \end{aligned}$$

b) Vergleichen Sie die Verhältnisse

$$|\lambda_1 - \lambda_A|/\varepsilon_A \quad , \quad |\lambda_1 - \lambda_B|/\varepsilon_B$$

und erklären Sie das Resultat mit Hilfe der Resultate aus Abschnitt 4.5.

Aufgabe 38: (4 Punkte)
Sei $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0$ ein Polynom vom Grade n und sei $P(\lambda_0) = 0$. Zeigen Sie:

$$|\lambda_0| \leq \max_{i=0,\ldots,n-1} |a_i| + 1 \; .$$

Aufgabe 39: (4 Punkte)
Zeichnen Sie die Gerschgorin-Kreise der folgenden Matrix. Was kann man über die Lage der Eigenwerte sagen?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Wenden Sie den Satz von Gerschgorin auch auf die transponierte Matrix an.

Aufgabe 40: (Programmieraufgabe, 4 Punkte) Schreiben Sie ein Programm für den QR-Algorithmus. Eine Primitivform (unter Verwendung der QR-Zerlegung aus Aufgabe 16) genügt. Testen Sie es an den Matrizen A, B aus Aufgabe 37.

Wir wünschen allen Studierenden ein
FROHES WEIHNACHTSFEST
und ein
GUTES NEUES JAHR 2005